2010 m. fizikos olimpiados II turo uždavinių sprendimai
XI klasė

1. Dalelė, judėdama horizontalia plokštuma greičiu $v = 1\ \text{ms}^{-1}$, artėja prie pločio $d = 0{,}1\ \text{m}$ stačių sienelių šulinio. Koks turi būti šulinio gylis *h*, kad ant šulinio dugno dalelė nukristų $n = 3$ kartus tampriai atšokusi nuo šulinio sienelių. Laisvojo kritimo pagreitis lygus $g = 9{,}80\ \text{ms}^{-2}$?

Sprendimas

Analizuodami dalelės judėjimą vertikalia kryptimi, sužinome, kad ant šulinio dugno ji nukris po laiko $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Per šį laiką nueitas horizontalus kelias lygus *vt*. Kad dalelė spėtų su šoninėmis sienelėmis susidurti lygiai *n* kartų, turi būti patenkinta sąlyga $nd \le vt < (n+1)d$. Išreikšdami šulinio gylį, randame

$$\boxed{\frac{gd^2}{2v^2}n^2 \le h < \frac{gd^2}{2v^2}(n+1)^2}.$$

Įrašę skaitines vertes apskaičiuojame $\boxed{0{,}441\ \text{m} \le h < 0{,}784\ \text{m}}$.

2. Horizontalus masės $2m$ ir ilgio $l = 50\ \text{cm}$ šiaudas remiasi į dvi taškines atramas, esančias atstumais $a_1 = 10\ \text{cm}$ nuo jo kairiojo galo ir $a_2 = 20\ \text{cm}$ nuo dešiniojo galo. Pradiniu laiko momentu ant šiaudo kairiojo galo tupėjusi masės *m* skruzdėlytė ima bėgti link šiaudo dešiniojo galo. Apskaičiuokite, kokiomis jėgomis šiaudas spaudžia atramas skruzdėlytei nubėgus atstumą *x* ir pavaizduokite šias priklausomybes grafiškai.

Sprendimas

Užrašome jėgų ir jėgų momentų balansą kairiojo šiaudo galo atžvilgiu:

$$R_1 + R_2 = 3mg,$$

$$mgx + 2mg\frac{l}{2} = R_1 a_1 + R_2(l - a_2).$$

Išsprendę šią lygčių sistemą randame

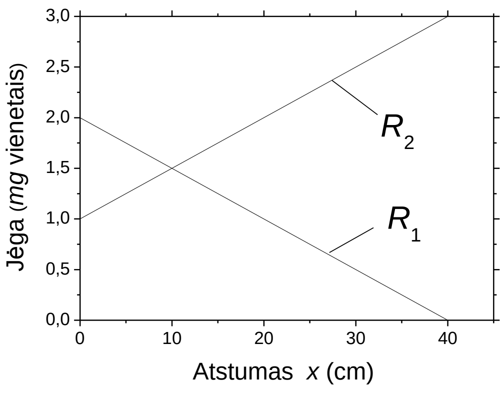
$$\boxed{R_1 = mg\frac{2l - x - 3a_2}{l - a_1 - a_2}} \text{ ir } \boxed{R_2 = mg\frac{l + x - 3a_1}{l - a_1 - a_2}}.$$

Kad būtų lengviau brėžti grafines priklausomybes, įrašome žinomas skaitines vertes ir randame

$$\frac{R_1}{mg} = 2 - \frac{x\,[\text{cm}]}{20},$$

$$\frac{R_2}{mg} = 1 + \frac{x\,[\text{cm}]}{20}.$$

Grafinės priklausomybės parodytos paveiksle.



Pastebime, kad skruzdėlytės koordinatei pasiekus vertę $\tilde{x} = 40$ cm, pirmosios atramos jėga virsta nuliu. Tai reiškia, kad sistema praranda stabilumą – skruzdėlytė ir šiaudas persisveria per antrąją atramą į dešinę pusę.

3. Nedidelis masės m = 200 g kūnas pririštas prie lengvo netąsaus siūlo sukamas vertikalioje plokštumoje juda apskritimo trajektorija. Kūno greitis apatiniame ir viršutiniame taškuose lygus atitinkamai v_1 = 3 m/s ir v_2 = 5 m/s. Kokia siūlo įtempimo jėga, kai jis vertikalus ir horizontalus?

Sprendimas

Pradžioje raskime siūlo ilgį. Pasinaudojame energijos tvermės dėsniu apatiniam ir viršutiniam taškams:

$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = 2mgl$. Iš čia $l = \frac{v_1^2 - v_2^2}{4g}$.

1) Siūlas vertikalus ir yra apačioje. Tuomet įcentrinei jėgai užrašome:

$F_1 - mg = \frac{mv_1^2}{l}$, čia F_1 – siūlo įtempimo jėga. Įrašę l išraišką randame:

$$\boxed{F_1 = mg\frac{5v_1^2 - v_2^2}{v_1^2 - v_2^2} = 14{,}2 \text{ N.}}$$

2) Siūlas vertikalus viršuje. Šiuo atveju įcentrinei jėgai

$F_2 + mg = \frac{mv_2^2}{l}$, čia F_2 – siūlo įtempimo jėga. Įrašę l išraišką randame:

$$\boxed{F_2 = mg\frac{5v_2^2 - v_1^2}{v_1^2 - v_2^2} = 2{,}45 \text{ N.}}$$

3) Siūlas horizontalus. Tada ėcentrinei jėgai

$F_3 = \frac{mu^2}{l}$, čia u – kūno greitis, kai siūlas horizontalus. Jį surandame iš energijos tvermės dėsnio:

$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mu^2}{2} = mgl$. Įrašę l išraišką randame $u^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2}$. Tada $\boxed{F_3 = 2mg\frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1^2 - v_2^2} = 4{,}17 \text{ N}}$.

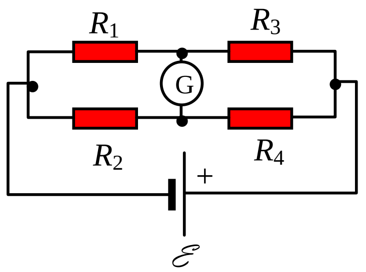
4. Koks srovės per galvanometrą G stipris šiais trimis atvejais:

a) $R_1 = R_2 = R, \quad R_3 = R_4 = 3R$;

b) $R_1 = R_3 = R, \quad R_2 = R_4 = 3R$;

c) $R_1 = R_4 = R, \quad R_2 = R_3 = 3R$.

Šaltinio elektrovara $\mathcal{E}$.



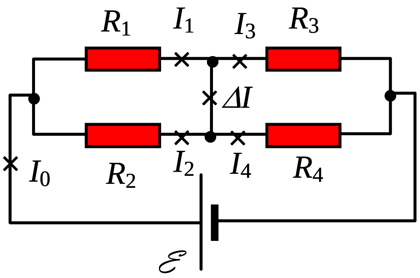
Sprendimas

a) Apskaičiuojame rezistorių R_1 ir R_2 įtampas:

$U_1 = \mathcal{E}\dfrac{R_1}{R_1 + R_3} = \dfrac{1}{4}\mathcal{E}$; $U_2 = \mathcal{E}\dfrac{R_2}{R_2 + R_4} = \dfrac{1}{4}\mathcal{E}$. Taigi, $U_1 = U_2$, todėl srovė per galvanometrą netekės, t.y. $\boxed{I_g = 0}$.

b) Vėl apskaičiuojame rezistorių R_1 ir R_2 įtampas:

$U_1 = \mathcal{E}\dfrac{R_1}{R_1 + R_3} = \dfrac{1}{2}\mathcal{E}$; $U_2 = \mathcal{E}\dfrac{R_2}{R_2 + R_4} = \dfrac{1}{2}\mathcal{E}$. Taigi, ir šiuo atveju $U_1 = U_2$, todėl srovė per galvanometrą netekės, t.y. $\boxed{I_g = 0}$.



c) Pažymėkime srovių per atitinkamas varžas stiprius I_1, I_2, I_3 ir I_4, per galvanometrą ΔI, o visos grandinės I_0 (žr. schemą). Iš tiltelio pečių simetrijos aišku, kad $I_1 = I_4$, $I_2 = I_3$. Taigi, $I_g = \Delta I = I_1 - I_2$. Galime sudaryti lygčių sistemą:

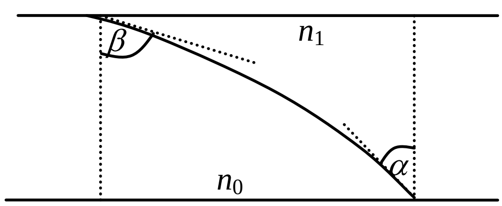
$\begin{cases} \dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{R_2}{R_1} \\ I_1 + I_2 = I_0 \end{cases}$ arba $\begin{cases} \dfrac{I_1}{I_2} = 3 \\ I_1 + I_2 = I_0 \end{cases}$. Iš čia surandame:

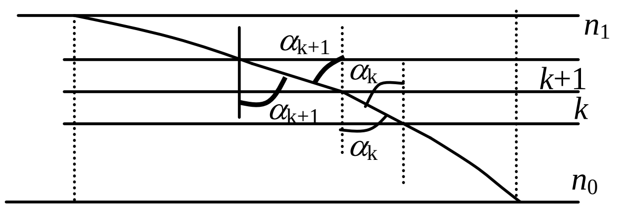
$I_1 = \dfrac{3}{4}I_0$, $I_2 = \dfrac{1}{4}I_0$. Bet $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}}{\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\mathcal{E}}{R}$. Taigi, $\boxed{I_g = I_1 - I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{3R}}$.

5. Į stataus cilindro formos indą supilto skysčio lūžio rodiklis monotoniškai mažėja nuo n_0 ties skysčio dugnu iki n_1 ties skysčio paviršiumi. Indo dugne šviesos šaltinis skleidžia šviesą kampu α į statmenį indo dugnui. Kokiu kampu β šviesos spindulys krinta į skysčio paviršių? Kokiam kampui α šviesa iš skysčio nesklis?

Sprendimas

Šviesa tokiame skystyje sklinda ne tiese, o kreive (žr. brėž. kairėje). Panagrinėkime labai plonus skysčio sluoksnelius, kuriuos pažymime k-uoju ir k+1-uoju, kuriuose lūžio rodiklį galime laikyti pastoviu, lygiu atitinkamai n_k ir n_{k+1}, be to, $n_k > n_{k+1}$, o kritimo ir lūžio kampai atitinkamai α_k ir α_{k+1}(žr. brėž. dešinėje).





Lūžio dėsnis šiems sluoksniams $\frac{\sin\alpha_{k+1}}{\sin\alpha_k} = \frac{n_k}{n_{k+1}}$. Taigi, $n_k \sin\alpha_k = n_{k+1} \sin\alpha_{k+1}$. Matome, kad ši sandauga nekinta, todėl ji tinka ir sluoksniams ties pačiu dugnu ir ties pačiu paviršiumi.

Taigi, $n_0 \sin\alpha = n_1 \sin\beta$. Iš čia $\boxed{\beta = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_1}\sin\alpha\right)}$.

Šviesa iš skysčio nesklis, kai bus išpildyta visiško vidaus atspindžio sąlyga: $\sin\beta_{\mathrm{rib}} = \frac{1}{n_1}$. Iš čia $\sin\alpha_{\mathrm{rib}} = \frac{1}{n_0}$ ir galiausiai $\boxed{\alpha \geq \arcsin\frac{1}{n_0}}$.